# Simplificação de funções Booleanas utilizando o método de Quine-McCluskey

**Luís Gomes, Abril 1999 , FCT-UNL**

## Introdução

Quando se torna necessário proceder à simplificação de funções Booleanas dependentes de "muitas" variáveis, os mapas de Karnaugh revelam-se de interesse reduzido ou nulo. Do ponto de vista prático, mapas de Karnaugh com mais de seis variáveis são inviáveis. Nessas situações, recomenda-se a utilização de métodos alternativos, como o de Quine-McCluskey que se descreve seguidamente. É um método adequado para o suporte à simplificação automática de funções Booleanas.
Este método baseia-se na utilização de tabelas, permitindo a verificação de adjacências, entre mintermos (na fase inicial de aplicação do método) ou entre quaisquer produtos de variáveis (a obter durante as fases seguintes).
Como já encontrado no método de simplificação algébrica de funções, bem como nos mapas de Karnaugh, uma adjacência entre dois mintermos ocorre quando apenas uma das variáveis envolvidas varia nas expressões algébricas associadas. Isso traduz-se numa simplificação imediata, no sentido de representar os dois mintermos adjacentes por uma expressão que não depende da variável que não se mantem constante. Concretamente, considerando as variáveis $A$ e $B$ e os mintermos $m_3=AB$ e $m_2=A\overline{B}$ como exemplos, a expressão $m_2+m_3$ pode ser simplificada através de

$$AB+A\overline{B}=A(B+\overline{B})=A.$$

A identificação de adjacências, como a ilustrada, está na base do método de Quine-McCluskey.

## Procedimentos do método

Pensemos na representação de cada mintermo através do número binário associado. Dado que as adjacências entre mintermos só podem potencialmente ocorrer em situações em que o número de 1s presentes nos números binários que representam os dois mintermos difiram em apenas um único 1, no método de Quine-McCluskey procede-se a um agrupamento prévio dos mintermos presentes na função que se pretende simplificar tendo por base o número de 1s do mintermo.
Considere-se a função *f* como exemplo.

$$f(A,B,C,D)=\sum(0,1,2,3,5,11,13,15)$$

Os grupos resultantes da aplicação do critério referido são os seguintes:

| | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| $m_0$ | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $m_1$ | 0 | 0 | 0 | 1 |
| $m_2$ | 0 | 0 | 1 | 0 |
| $m_3$ | 0 | 0 | 1 | 1 |
| $m_5$ | 0 | 1 | 0 | 1 |
| $m_{11}$ | 1 | 0 | 1 | 1 |
| $m_{13}$ | 1 | 1 | 0 | 1 |
| $m_{15}$ | 1 | 1 | 1 | 1 |

A identificação de possíveis simplificações faz-se através de comparação entre todos os mintermos de um grupo com todos os mintermos do grupo seguinte; sempre que uma adjacência é identificada, os dois mintermos envolvidos são marcados e adiciona-se uma linha numa tabela complementar referindo os mintermos associados, os valores das variáveis que se mantêm constantes e um traço associado à variável que muda. Esta linha representando um produto de variáveis denomina-se por implicante.

Em particular, comparando $m_0$ com o grupo seguinte, constituído por $m_1$ e $m_2$, dois grupos irão ser formados, o primeiro agrupando $m_0$ e $m_1$, que vai gerar uma linha na nova tabela com valor 000- (associado às variáveis ABCD), e o segundo agrupando $m_0$ e $m_2$, que vai gerar uma linha na nova tabela com valor 00-0.

Num segundo exemplo, resultante da análise de $m_3$ com o grupo seguinte, constituído por $m_{11}$ e $m_{13}$, apenas um novo grupo irá ser formado, agrupando $m_3$ e $m_{11}$, gerando uma linha na nova tabela com valor -011.

Considerando que a partir de agora os mintermos são referidos apenas pelo seu número (isto é, por *i* e não por $m_i$), a aplicação do método referido conduz às seguintes tabelas:

Tabela 1

| | | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|---|
| √ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| √ | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| √ | 2 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| √ | 3 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| √ | 5 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| √ | 11 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| √ | 13 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| √ | 15 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Tabela 2

| | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| 0,1 | 0 | 0 | 0 | - |
| 0,2 | 0 | 0 | - | 0 |
| 1,3 | 0 | 0 | - | 1 |
| 1,5 | 0 | - | 0 | 1 |
| 2,3 | 0 | 0 | 1 | - |
| 3,11 | - | 0 | 1 | 1 |
| 5,13 | - | 1 | 0 | 1 |
| 11,15 | 1 | - | 1 | 1 |
| 13,15 | 1 | 1 | - | 1 |

O passo seguinte aplica uma técnica de identificação de adjacências semelhante, considerando os grupos da tabela 2. Como condição prévia adicional torna-se necessário garantir que a variável removida no primeiro passo seja comum.

Tomando o implicante 0,1 como exemplo, das comparações com o grupo seguinte (constituído pelos implicantes 1,3, 1,5 e 2,3), a primeira e segunda são excluídas (dado que os traços se encontram em colunas diferentes) e a terceira é bem sucedida, resultando na criação de uma linha numa nova tabela complementar, representando o implicante 0,1;2,3 com valor associado 00--.

Como segundo exemplo, considere-se o implicante 3,11, que através da comparação com o grupo seguinte não encontra simplificações adicionais.

Da aplicação do método referido, resulta o seguinte conjunto de tabelas:

Tabela 1

| | | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|---|
| √ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| √ | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| √ | 2 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| √ | 3 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| √ | 5 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| √ | 11 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| √ | 13 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| √ | 15 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Tabela 2

| | | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|---|
| √ | 0,1 | 0 | 0 | 0 | - |
| √ | 0,2 | 0 | 0 | - | 0 |
| √ | 1,3 | 0 | 0 | - | 1 |
| | 1,5 | 0 | - | 0 | 1 |
| √ | 2,3 | 0 | 0 | 1 | - |
| | 3,11 | - | 0 | 1 | 1 |
| | 5,13 | - | 1 | 0 | 1 |
| | 11,15 | 1 | - | 1 | 1 |
| | 13,15 | 1 | 1 | - | 1 |

Tabela 3

| | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| 0,1;2,3 | 0 | 0 | - | - |
| 0,2;1,3 | 0 | 0 | - | - |

Neste exemplo, a tabela 3 contem duas linhas, contudo representando o mesmo implicante, representado por 00--. A segunda linha é uma duplicação da primeira, pelo que deve ser eliminada.

A razão para o seu aparecimento deve-se ao facto dos quatro mintermos envolvidos (0,1,2 e3) serem adjacentes e o implicante resultante poder ser construído de duas formas: a primeira agrupando inicialmente (0, 1) e (2, 3), resultando na eliminação da variável D, seguida de agrupamento desses dois implicantes; a segunda agrupando inicialmente (0, 2) e (1, 3), resultando na eliminação da variável C, seguida de agrupamento desses dois implicantes. O resultado final é, obviamente, o mesmo e pode ser compreendido recorrendo a um mapa de Karnaugh e à sua expressividade gráfica.

Nas tabelas resultantes não é possível proceder a mais simplificações. Os implicantes que não foram agrupados designam-se por implicantes primos. Devem ser marcados como tal (através de, por exemplo, →) e a função *f* pode ser representada como uma soma desses implicantes primos.

Tabela 1

| | | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|---|
| √ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| √ | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| √ | 2 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| √ | 3 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| √ | 5 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| √ | 11 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| √ | 13 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| √ | 15 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Tabela 2

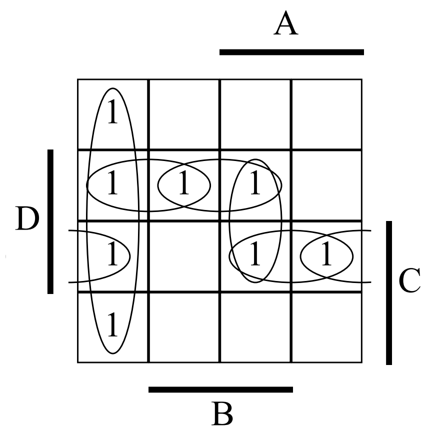
| | | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|---|
| √ | 0,1 | 0 | 0 | 0 | - |
| √ | 0,2 | 0 | 0 | - | 0 |
| √ | 1,3 | 0 | 0 | - | 1 |
| → | 1,5 | 0 | - | 0 | 1 |
| √ | 2,3 | 0 | 0 | 1 | - |
| → | 3,11 | - | 0 | 1 | 1 |
| → | 5,13 | - | 1 | 0 | 1 |
| → | 11,15 | 1 | - | 1 | 1 |
| → | 13,15 | 1 | 1 | - | 1 |

Tabela 3

| | | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|---|
| → | 0,1;2,3 | 0 | 0 | - | - |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *f(A,B,C,D)* = | *(1,5)* + | *(3,11)* + | *(5,13)* + | *(11,15)* + | *(13,15)* + | *(0,1;2,3)* |
| | 0-01 | -011 | -101 | 1-11 | 11-1 | 00-- |
| = | $\overline{A}\,\overline{C}D$ + | $\overline{B}CD$ + | $B\overline{C}D$ + | $ACD$ + | $ABD$ + | $\overline{A}\,\overline{B}$ |

Como pode ser facilmente concluído pelo mapa de Karnaugh associado (que se apresenta seguidamente), existem termos redundantes.




Importa, desta forma, complementar a técnica apresentada para identificação dos implicantes primos, com um critério para a sua selecção, que permita encontrar a solução mais simples. Sem o intuito de ser exaustivo, apresenta-se um método para atingir o objectivo enunciado. Baseia-se na construção de uma tabela, considerando como linhas todos os implicantes primos encontrados na primeira parte do método, e como colunas todos os mintermos pertencentes à função em análise. Nessa tabela serão marcadas as coberturas de cada implicante primo em relação aos mintermos e identificados os implicantes primos que sejam únicos representantes de um mintermo, (através da localização de colunas que sejam cobertos por apenas um implicante primo). Estes implicantes primos são designados por implicantes primos essenciais e farão obrigatoriamente parte da expressão simplificada representativa da função.
No exemplo em análise, existem as colunas 0 e 2 com apenas uma marcação, impondo a marcação do implicante primo 0,1;2,3 como implicante primo essencial.

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 5 | 11 | 13 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1,5 | | x | | | x | | | |
| 3,11 | | | | x | | x | | |
| 5,13 | | | | | x | | x | |
| 11,15 | | | | | | x | | x |
| 13,15 | | | | | | | x | x |
| → 0,1;2,3 | x | x | x | x | | | | |
| | ↑ | | ↑ | | | | | |

Tomando a lista de implicantes primos essenciais, marcam-se todos os mintermos que sejam por eles cobertos. Para o exemplo em análise, obtem-se a seguinte tabela.

| | √ | √ | √ | √ | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 5 | 11 | 13 | 15 |
| 1,5 | | x | | | x | | | |
| 3,11 | | | | x | | x | | |
| 5,13 | | | | | x | | x | |
| 11,15 | | | | | | x | | x |
| 13,15 | | | | | | | x | x |
| → 0,1;2,3 | x | x | x | x | | | | |

A partir desta tabela é possível obter uma tabela simplificada contendo apenas, como colunas, os mintermos não cobertos pelos implicantes primos essenciais, e como linhas, os implicantes primos não essenciais. Para o exemplo em análise, obtem-se a tabela seguinte.

| | 5 | 11 | 13 | 15 |
|---|---|---|---|---|
| 1,5 | x | | | |
| 3,11 | | x | | |
| 5,13 | x | | x | |
| 11,15 | | x | | x |
| 13,15 | | | x | x |

O objectivo do passo seguinte é o de reduzir o número de implicantes primos utilizados através da identificação de implicantes primos cobertos por outros implicantes. No exemplo em análise, o implicante primo 1,5 é coberto pelo implicante primo 5,13, no sentido em que todos os mintermos presentes na tabela e representados por 1,5 são também representados por 5,13. De modo semelhante, o implicante primo 3,11 é coberto pelo implicante primo 11,15.
A tabela resultante da eliminação dos implicantes primos cobertos é apresentada seguidamente.

| | 5 | 11 | 13 | 15 |
|---|---|---|---|---|
| 5,13 | x | | x | |
| 11,15 | | x | | x |
| 13,15 | | | x | x |

O procedimento utilizado na tabela inicial para identificação de implicantes primos essenciais pode ser utilizado nesta tabela simplificada, permitindo a identificação de implicantes primos essenciais secundários, através da identificação de mintermos que sejam unicamente cobertos por um dos implicantes primos. No exemplo em análise, este procedimento identifica 5,13 e 11,15 como implicantes primos essenciais secundários.

| | √ | √ | √ | √ |
|---|---|---|---|---|
| | 5 | 11 | 13 | 15 |
| → 5,13 | x | | x | |
| → 11,15 | | x | | x |
| 13,15 | | | x | x |
| | ↑ | ↑ | | |

Marcando os mintermos cobertos pelos implicantes primos essenciais secundários permitirá gerar uma nova tabela simplificada, contendo como colunas todos os mintermos ainda não representados por nenhum implicante primo essencial ou essencial secundário, e como linhas todos os implicantes primos não seleccionados. Nesta tabela os implicantes primos deverão ser selecionados de modo a garantir uma expressão simples, através da selecção do menor número de implicantes que sejam uma cobertura para os mintermas presentes
No exemplo em análise, não existem mintermos a descoberto, pelo que o processo de simplificação está concluído e a função pode ser representada como o somatório dos implicantes marcados, ou seja,

$$
\begin{array}{lllll}
f(A,B,C,D) & = & (5,13)\ + & (11,15)\ + & (0,1;2,3) \\
 & & \text{-101} & \text{1-11} & \text{00--} \\
 & = & B\overline{C}D\ + & ACD\ + & \overline{A}\,\overline{B}
\end{array}
$$

## Simplificação do método

Embora a principal motivação para utilização do método de Quine-McCluskey tenha sido a de permitir a simplificação automática de expressões, para o caso em que a simplificação seja realizada manualmente, a representação dos mintermos durante a

primeira parte do método através do número binário associado, para além de fastidiosa, é propensa a erros.
Assim, a utilização do método simplificado vai diferir do apresentado na secção anterior em quatro aspectos, que se descrevem seguidamente.
O primeiro é o de que os mintermos são representados unicamente pelo número decimal associado.
A geração de um implicante ocorre sempre que a diferença entre os números representativos dos dois mintermos (ou implicantes nas tabelas seguintes à primeira) seja positiva e igual a uma potência de 2.
A segunda diferença introduzida pelo método simplificado, inclui na representação de um implicante, para além da referência dos mintermos envolvidos, a diferença verificada, entre parêntesis. Este valor da diferença tem a mesma função que o traço no método apresentado na secção anterior, permitindo seleccionar os implicantes potencialmente agrupáveis quando se comparar dois grupos de implicantes adjacentes de cada tabela.
A terceira diferença permite evitar a necessidade de eliminação de implicantes duplicados, através da representação ordenada dos mintermos de um determinado implicante. Aquando da geração de um implicante com a mesma representação, este simplesmente não é referido. No exemplo analisado, quer o implicante 0,1;2,3, quer o implicante 0,2;1,3 serão representados através de 0,1,2,3.
A aplicação do método simplificado conduz à seguinte tabela.

| Tabela 1 | Tabela 2 | Tabela 3 |
|---|---|---|
| √ 0 | √ 0,1(1) | → 0,1,2,3(1,2) |
| √ 1 | √ 0,2(2) | |
| √ 2 | √ 1,3(2) | |
| √ 3 | → 1,5(4) | |
| √ 5 | √ 2,3(1) | |
| √ 11 | → 3,11(8) | |
| √ 13 | → 5,13(8) | |
| √ 15 | → 11,15(4) | |
| | → 13,15(2) | |

A segunda parte do método é semelhante à apresentada na secção anterior, obtendo-se no final a expressão

$$f(A,B,C,D) = (5,13(8)) + (11,15(4)) + (0,1,2,3(1,2))$$

A obtenção dos números representativos de cada um dos implicantes referidos faz-se simplesmente encontrando a representação em binário do número de um dos mintermos desse implicante, anulando a dependência das variáveis (colocando um traço) correspondem a posições com o(s) peso(s) indicados dentro dos parêntesis. Para o exemplo em análise, o implicante 5,13(8) será representado por -101 (5=0101 com traço na posição de peso 8). Esta é a quarta e última diferença em relação ao método apresentado na secção anterior.

## Simplificação de funções incompletamente especificadas

A simplificação de funções incompletamente especificadas introduz uma única alteração em relação ao método apresentado. Essa alteração traduz-se na introdução na tabela 1 de referências também dos mintermos associados aos "*don't care*" (isto é, para efeitos da determinação de todos os potenciais implicantes consideram-se os "*don't care*" como 1s).
Considerando como exemplo a função

$$f(A,B,C,D) = \sum(0,3,5,11,13,15) + d(1,2)$$

o resultado da aplicação da primeira parte do método é semelhante ao obtido nas secções anteriores, ou seja

| Tabela 1 | Tabela 2 | Tabela 3 |
|---|---|---|
| √ 0 | √ 0,1(1) | → 0,1,2,3(1,2) |
| √ 1 | √ 0,2(2) | |
| √ 2 | √ 1,3(2) | |
| √ 3 | → 1,5(4) | |
| √ 5 | √ 2,3(1) | |
| √ 11 | → 3,11(8) | |
| √ 13 | → 5,13(8) | |
| √ 15 | → 11,15(4) | |
| | → 13,15(2) | |

Na segunda parte do método apenas se consideram os mintermos para os quais a função é definida como tendo o valor 1, não se incluindo portanto oa mintermos associados a "*don't care*".

| | 0 | 3 | 5 | 11 | 13 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1,5 | | | x | | | |
| 3,11 | | x | | x | | |
| 5,13 | | | x | | x | |
| 11,15 | | | | x | | x |
| 13,15 | | | | | x | x |
| → 0,1;2,3 | x | x | | | | |
| | ↑ | | | | | |

Os procedimentos do método aplicar-se-ão como referido nas secções anteriores permitindo obter (novamente) a expressão simplificada

$$f(A,B,C,D) = B\overline{C}D + ACD + \overline{A}\,\overline{B}$$